Bachelorarbeit

Beiträge von Vektor-Leptoquarks zu Kaon-Zerfällen

Philipp Stephan

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Lehrstuhl für Theoretische Physik II
Fakultät für Physik und Astronomie
Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Bachelorarbeit

Beiträge von Vektor-Leptoquarks zu Kaon-Zerfällen

Philipp Stephan

April 2017

Betreut durch Prof. Dr. Werner Porod

Philipp Stephan
⟨briefe@philippstephan.de⟩
Weingartenstraße 41
97072 Würzburg

Erzeugt am 4. April 2017.
Geschrieben in Vim und gesetzt mit LaTeX und KOMA-Script.

Zusammenfassung

Es wird ein Pati-Salam-ähnliches Model untersucht, bei dem die SU(3) des Standardmodells durch eine SU(4)-Farbgruppe ersetzt wird, wie in [7] vorgeschlagen; die Leptonen tragen hier die vierte Farbe. Aus dieser Symmetrie folgt ein neues Eichboson: Das Vektor-Leptoquark. Mithilfe der Lagrange-Dichte der Wechselwirkung des Vektor-Leptoquarks mit den Fermionen werden Feynman-Regeln für einen Kaonzerfall abgeleitet. Damit wird ein Übergangsmatrixelement für den Zerfall $\mathrm{K}_\mathrm{L}^0 \rightarrow \mathrm{e}^\pm \mu^\mp$ und schließlich dessen Verzweigungsverhältnis berechnet. Durch Vergleich mit experimentellen Nachweisgrenzen dieses im Standardmodell verboteten Zerfalls kann eine Untergrenze von $m_{\mathrm{LQ}} = 1.6 \cdot 10^3\,\mathrm{TeV}$ für die Vektor-Leptoquark-Masse gefunden werden.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Das Standardmodell der Teilchenphysik (SM) ist sehr erfolgreich bei der Beschreibung der grundlegenden Teilchen und ihrer Wechselwirkungen. Seine theoretischen Vorhersagen stehen in großen Teilen in sehr genauer Übereinstimmung mit den experimentell ermittelten Daten. Es gibt jedoch Phänomene, wie zum Beispiel Neutrinooszillationen, welche sich mit Hilfe des Standardmodells noch nicht erklären lassen. Deshalb werden diverse Theorieerweiterungen vorgeschlagen, die versuchen, einige dieser Probleme zu lösen.

Beim Standardmodell handelt es sich um eine Eichtheorie. Das heißt man geht davon aus, dass die Natur gewissen Symmetrien unterliegt, unter deren Transformationen die physikalischen Messgrößen invariant bleiben. Durch das Ausführen dieser Eichtransformationen erhält man jedoch neue Teilchen, welche Wechselwirkungen beschreiben. Nun ist man stets bemüht, die Beschreibung der Natur möglichst simpel zu halten. Dies äußert sich beispielsweise in einer großen Symmetrie, welche es erlaubt, eine große Klasse von Teilchen durch eine einheitliche Theorie zu beschreiben. Am schönsten wäre es natürlich, würden alle Teilchen unter einer gemeinsamen Symmetrie vereinigt. Bestrebungen, Theorien zu konstruieren, die diese Anforderung erfüllen, fasst man unter dem Überbegriff der *Großen Vereinheitlichten Theorie*, kurz „GUT“ (englisch *Grand Unified Theory*), zusammen.

In dieser Arbeit soll nun eine Theorieerweiterung des Standardmodells untersucht werden, die einen Schritt in diese Richtung unternimmt. Sie schlägt eine Symmetrie vor, der alle Materiefelder – die Fermionen – unterliegen. Das Standardmodell unterscheidet hier zwischen Quarks, die, unter anderem, stark wechselwirken, und Leptonen, welche dies nicht tun. Die starke Wechselwirkung wird im Rahmen der Quantenchromodynamik (QCD) durch drei Ladungen beschrieben, die *Farben* genannt werden. Das in [7] vorgeschlagene „Leptoquark“-Modell behandelt jetzt die Fermionen in einer gemeinsamen Symmetriegruppe, wobei die Leptonen die vierte Farbe tragen. Diese neue Symmetrie führt, wie oben erwähnt, zu einem neuen Austauschteilchen, welches im Standardmodell nicht vorkommt.

Ziel dieser Arbeit soll es sein, dieses Austauschteilchen genauer zu untersuchen und insbesondere eine Abschätzung, beziehungsweise Einschränkung an seine Masse zu erhalten. Eine solche Eingrenzung lässt sich besonders gut durch die Betrachtung von Prozessen erhalten, welche im Standardmodell verboten sind. Hier existieren Grenzen der Messgenauigkeit, unter denen möglicherweise neue Physik zu finden ist. Ein solcher Bereich, in denen das Leptoquarkmodell neue Prozesse vorhersagt, ist die Kaonphysik. Insbesondere wird ein spezieller Kaon-Zerfall untersucht, bei dem ein $\mathrm{K}_{\mathrm{L}}^{0}$ in ein Myon-Positron- beziehungsweise Antimyon-Elektron-Paar zerfällt.

Nach diesen einführenden Worten wird in Kapitel 2 eine knappe Erläuterung der benötigten mathematischen und physikalischen Grundlagen gegeben. Anschließend beschreibt Kapitel 3 das verwendete Modell genauer, geht auf die verwendete Symmetrie ein und listet die geforderten Teilchen auf. In Kapitel 4 wird dann die vorgenommene Rechnung ausgeführt, zusammen mit Details zur Kaon-Physik, Motivation und numerischen Auswertung. Abschließend fasst Kapitel 5 die Ergebnisse vergleichend zusammen und gibt einen Ausblick auf mögliches weiteres Vorgehen.

2. Grundlagen

2.1. Natürliche Einheiten

Um die Rechnungen stark zu vereinfachen und im Kanon der bestehenden Literatur [zum Beispiel 14, Abschnitt „Units and Conventions“] der Quantenfeldtheorie zu bleiben, werden *natürliche Einheiten* verwendet. Dabei werden die Lichtgeschwindigkeit c und das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum $\hbar$ per definitionem auf

$$c = \hbar = 1 \tag{2.1}$$

gesetzt.

Es wird nun Energie als Basisdimension mit eV (Elektronenvolt) als Grundeinheit gewählt und da $\hbar \propto \text{Energie} \cdot \text{Zeit}$ erhält Zeit die Einheit eV^{-1}. Abstände erhalten wegen $c \propto \text{Abstand}/\text{Zeit}$ ebenfalls die Einheit eV^{-1}.

2.2. Gamma-Matrizen

Die *Gamma-Matrizen* $\{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$ – auch *Dirac-Matrizen* genannt – sind eine Menge von Matrizen, die eine Darstellung der Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_4 \tag{2.2}$$

auf dem Raum der Spinoren bilden [4, Abschnitt 7.2.1]. Hierbei steht $\{\cdot, \cdot\}$ für den Antikommutator. Zusätzlich sei noch gefordert, dass gilt:

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \,. \tag{2.3}$$

Mithilfe der Gamma-Matrizen lässt sich eine Tensorstruktur

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{2.4}$$

definieren. Dabei ist $[\cdot, \cdot]$ der Kommutator.

Es lässt sich außerdem eine fünfte Gamma-Matrix

$$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{2.5}$$

bilden. Für diese gilt:

$$\gamma^5\gamma^5 = \mathbb{1}_4 \,, \qquad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5 \,, \qquad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \,. \tag{2.6}$$

Mithilfe dieser Matrix lassen sich die hermiteschen Projektionsoperatoren

$$P_\mathrm{R} = \frac{1}{2}(1+\gamma^5), \qquad P_\mathrm{L} = \frac{1}{2}(1-\gamma^5) \tag{2.7}$$

definieren. Sie projizieren aus Spinoren (siehe Abschnitt 2.3) nur die jeweiligen chiralen Anteile heraus:

$$u_\mathrm{L} = P_\mathrm{L} u, \qquad \overline{u}_\mathrm{L} = u_\mathrm{L}^\dagger \gamma^0 = u^\dagger P_\mathrm{L}^\dagger \gamma^0 = u^\dagger \gamma^0 P_\mathrm{R} = \overline{u} P_\mathrm{R}\,. \tag{2.8}$$

Es folgen ebenfalls noch einige Identitäten.

$$P_\mathrm{R}\gamma^\mu P_\mathrm{L} = P_\mathrm{R}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_\mathrm{L}\,, \qquad P_\mathrm{L}\gamma^\mu P_\mathrm{R} = P_\mathrm{L}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_\mathrm{R}\,, \tag{2.9}$$

$$P_\mathrm{R}\gamma^5 = P_\mathrm{R}\,, \qquad P_\mathrm{L}\gamma^5 = -P_\mathrm{L}\,, \tag{2.10}$$

Eine explizite Darstellung der Gamma-Matrizen ist die *Weyl-Darstellung*

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Sie wird auch *chirale Darstellung* genannt. Hierbei sind σ^i die Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

2.3. Spinoren

Ein vierkomponentiges Feld, welches sich unter Lorentz-Transformationen gemäß der Generatoren $\sigma^{\mu\nu}/2$ transformiert, wird *Spinor* genannt [14, Abschnitt 3.2].

Die eigentlichen Lorentz-Transformationen im Spinorraum zerfallen in zwei unterschiedliche Darstellungen, die *links-* und *rechtshändig* genannt werden. Diese Eigenschaft heißt *Chiralität*. Wird die Weyl-Basis verwendet, so sind die linkshändigen Anteile gerade die ersten beiden und die rechtshändigen gerade die letzten beiden Komponenten:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \qquad P_\mathrm{L}\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_\mathrm{R}\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Da Lorentztransformationen die Anteile unterschiedlicher Chiralität nicht mischen, können auch zweikomponentige *Weyl-Spinoren*

$$\psi_\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \qquad \psi_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

verwendet werden [4, Abschnitt 7.2.4].

3. Das Modell

In dieser Arbeit wird ein Modell verwendet, das in [7] vorgeschlagen wurde. Die Angaben in diesem Kapitel beziehen sich – wenn nicht anders kenntlich gemacht – auf diese Quelle.

3.1. Gruppenstruktur

Das Modell basiert auf der Eichgruppe

$$G_{\mathrm{LQ}} = \mathrm{SU}(4)_{\mathrm{C}} \otimes \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}} \otimes \mathrm{U}(1)_{\mathrm{R}}\,, \tag{3.1}$$

welche dann zur Standardmodell-Gruppe $G_{\mathrm{SM}} = \mathrm{SU}(3) \otimes \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}} \otimes \mathrm{U}(1)_Y$ gebrochen wird. Hierbei werden die Fermionen (Leptonen und Quarks) in der Gruppe $\mathrm{SU}(4)_{\mathrm{C}}$ zusammengefasst, wobei die Leptonen in Analogie zur Quantenchromodynamik die „vierte Farbe“ tragen.

Im Folgenden wird das Transformationsverhalten der Teilchen unter diesen Eichgruppen in der Schreibweise (n, m, s) angegeben, wobei n die Darstellung unter der SU(4), m diejenige unter der SU(2) und s die Phase der U(1) angibt [2]. Bei $(n, m, s)_{\mathrm{SM}}$ gilt dies analog für die Standardmodell-Eichgruppe. Die relevanten Darstellungen hier auftretender Gruppen sind [8]:

1 Dies ist die triviale Darstellung jeder Gruppe, bei der alle Gruppenelemente durch die 1 dargestellt werden. Das führt zu keiner Wechselwirkung.

2 Dies ist die definierende Darstellung der SU(2). Die Objekte sind demnach zweikomponentige Vektoren unter der SU(2). Für die Generatoren wird die Standardbasis proportional zu den Pauli-Matrizen (Gleichung 2.12) gewählt.

3 Dies ist die definierende Darstellung der SU(3). Die Objekte sind demnach dreikomponentige Vektoren unter der SU(3). Die Basis für die Generatoren wird hier proportional zu den Gell-Mann-Matrizen [8, Abschnitt 7.1] verwendet.

4 Dies ist die definierende Darstellung der SU(4). Die Objekte sind demnach vierkomponentige Vektoren unter der SU(4). Durch erneute Verallgemeinerung der Gell-Mann-Matrizen erhält man eine mögliche Basis für die Generatoren [17, Gleichung 3].

$\overline{\mathbf{4}}$ Diese Darstellung wird auch „Anti-Vier“ genannt. Es handelt sich um die komplex konjugierte Darstellung der SU(4). Die Generatoren gehen hierbei aus den Generatoren der definierenden Darstellung durch Vorzeicheninversion und komplexe Konjugation gemäß $T_a^{(\overline{\mathbf{4}})} := -T_a^{(\mathbf{4})*}$ hervor.

15 Dies ist die adjungierte Darstellung der SU(4). Die Generatoren sind hierbei einfach die Strukturkonstanten der Gruppe. Für die Struktukonstanten gilt: $[T_a^{(\mathbf{4})}, T_b^{(\mathbf{4})}] = \mathrm{i} f_{abc} T_c^{(\mathbf{4})}$. Damit sind die Generatoren der adjungierten Darstellung $[T_a^{(\mathbf{15})}]_{bc} := -\mathrm{i} f_{abc}$.

3.2. Teilchengehalt

Das Modell wird mit folgenden Fermionen gefüllt.

$$F_{\mathrm{LQ}} \sim (\mathbf{4}, \mathbf{2}, 0)\,, \qquad F_{\mathrm{LQ}} = \begin{pmatrix} u_{\mathrm{L}}^i & d_{\mathrm{L}}^i \\ \nu_{\mathrm{L}} & e_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}\,, \tag{3.2}$$

$$F_{\mathrm{u}} \sim \left(\overline{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, -1/2\right)\,, \qquad F_{\mathrm{u}} = \begin{pmatrix} u^{\mathrm{c}i} & \nu^{\mathrm{c}} \end{pmatrix}\,, \tag{3.3}$$

$$F_{\mathrm{d}} \sim \left(\overline{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, 1/2\right)\,, \qquad F_{\mathrm{d}} = \begin{pmatrix} d^{\mathrm{c}i} & e^{\mathrm{c}} \end{pmatrix}\,. \tag{3.4}$$

Hierbei zählt $i = 1, 2, 3$ die Standardmodell-Farben durch, wobei die Leptonen, wie bereits erwähnt, die vierte Farbe tragen. Ein hochgestelltes „c“ deutet Ladungskonjugation an.

Um die Symmetrie der Eichgruppe G_{LQ} zur Standarmodell-Eichgruppe G_{SM} zu brechen, wird ein Skalarfeld

$$\chi \sim (\mathbf{4}, \mathbf{1}, 1/2)\,, \qquad \chi = \begin{pmatrix} \chi_u^i \\ \chi_R^0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

hinzugefügt. Der Vakuumerwartungswert der vierten Komponente wird mit $\langle \chi_R^0 \rangle = v_\chi/\sqrt{2}$ parametrisiert. Dazu kommen noch zwei weitere Skalare. Ein Higgs-Doublet H und ein Skalar Φ:

$$H \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2)\,, \qquad H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}\,, \tag{3.6}$$

$$\Phi \sim (\mathbf{15}, \mathbf{2}, 1/2)\,, \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_8 & \Phi_3 \\ \Phi_4 & 0 \end{pmatrix} + T_{15} H_2\,, \tag{3.7}$$

wobei T_{15} ein Generator der *definierenden* Darstellung der SU(4) (siehe Abschnitt 3.1) ist. H_2 ist hierbei ein weiteres Higgs-Doublet. Die hier enthaltenen skalaren Leptoquark-Teilchen transformieren sich nach

$$\Phi_8 \sim (\mathbf{8}, \mathbf{2}, 1/2)_{\mathrm{SM}}\,, \qquad \Phi_3 \sim \left(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, -1/6\right)_{\mathrm{SM}}\,, \qquad \Phi_4 \sim (\mathbf{3}, \mathbf{2}, 7/6)_{\mathrm{SM}}\,, \tag{3.8}$$

werden aber im Folgenden nicht weiter betrachtet.

Aus den Eichtransformationen gehen neue Eichfelder hervor. Die $\mathrm{SU}(4)_{\mathrm{C}}$-Eichbosonen lassen sich darstellen als

$$A \sim (\mathbf{15}, \mathbf{1}, 0)\,, \qquad A_\mu = \begin{pmatrix} G_\mu & X_\mu/\sqrt{2} \\ X_\mu^*/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} + T_{15} B'_\mu\,. \tag{3.9}$$

Die $G_\mu \sim (\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)_{\text{SM}}$ sind dabei die bekannten Gluonen des Standardmodells. Von der $\text{U}(1)_{\text{R}}$ erhält man ein Eichfeld B_{R}, von der $\text{SU}(2)_{\text{L}}$ die drei Felder $W^{i\mu}$. Diese führen zusammen mit dem B'_μ-Boson nach der Symmetriebrechung auf W-, Z-, und Z′-Bosonen, sowie das Photon. Sie werden jedoch im weiteren Verlauf der Arbeit nicht weiter betrachtet. Das für diese Arbeit interessante Vektorboson ist das X_μ, welches als Vektor-Leptoquark bezeichnet wird.

Da sich im weiteren Verlauf vor allem an der Nomenklatur von [2] orientiert wird, wird das X-Boson von hier an U_1 genannt. Es transformiert sich gemäß

$$U_1 \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2/3)_{\text{SM}}\,. \tag{3.10}$$

Da es ein Singulett unter der SU(2) ist, ist seine schwache Isospinkomponente $I_z = 0$. Die Hyperladung unter der $\text{U}(1)_Y$ beträgt $Y = 2/3$. Es trägt demnach eine elektrische Ladung von $Q = I_z + Y = 2/3$ [7].

Ziel dieser Arbeit soll es nun sein, durch Vergleich dieser Theorie mit experimentellen Daten eine untere Schranke für die Masse dieses Vektor-Leptoquarks zu erhalten. Dies wird speziell durch die Untersuchung eines Meson-Zerfallsprozesses bewerkstelligt, welcher im Standardmodell verboten ist, jedoch in diesem Modell durch das U_1 realisiert werden kann. Der für die Wechselwirkung relevante Teil der Lagrange-Dichte wird in Gleichung 4.3 angegeben.

4. Kaon-Zerfall

4.1. Kaonen

Kaonen sind Mesonen, also aufgebaut aus Quark-Antiquark-Paaren. Sie bestehen aus einem Strange-Antiquark und einem Quark der ersten Generation, also Up und Down, oder aus deren Antiteilchen. In Tabelle 4.1 ist eine Übersicht der verschiedenen Kaonen und ihrer Quarkzusammensetzung gegeben.

Art	Symbol	Quarks
K-Mesonen	K^0	$d \quad \bar{s}$
	K^+	$u \quad \bar{s}$
K-Anti-Mesonen	$\overline{K}^0$	$\bar{d} \quad s$
	K^-	$\bar{u} \quad s$
K-Short	K^0_S	$(d\bar{s} + s\bar{d})/\sqrt{2}$
K-Long	K^0_L	$(d\bar{s} - s\bar{d})/\sqrt{2}$

TABELLE 4.1.: Die verschiedenen Kaonen nach [13]. Die Mischzustände K-Short und K-Long sind ihre eigenen Antiteilchen.

Die Mischzustände K-Short und K-Long sind nach ihren Lebensdauern benannt. Wie Tabelle A.2 zu entnehmen ist, ist K-Short wesentlich kurzlebiger als K-Long. Dies führt zu einer weitaus kleineren totalen Zerfallsbreite des K-Longs im Gegensatz zum K-Short. Da hier ein Prozess betrachtet werden soll, welcher im Standardmodell nicht auftritt, ist der Anteil seiner Zerfallsbreite an der totalen Zerfallsbreite, die hauptsächlich vom Standardmodell dominiert wird, beim K-Long größer als beim K-Short. Obwohl wegen der Mischung beide Kaonen für den Zerfall betrachtet werden könnten, ist die Genauigkeit des Ergebnisses beim K-Long höher. Näheres zur Zerfallsbreite ist in Abschnitt 4.5.2 beschrieben.

Im Folgenden sollen die Zerfälle

$$K^0_L \to e^\pm \, \mu^\mp \tag{4.1}$$

eines Kaons in ein Positron und ein Myon oder ein Elektron und ein Antimyon betrachtet werden. Beide Ladungsendzustände sind – bei geltender CP-Invarianz – gleich wahrscheinlich und haben die gleiche Zerfallsbreite. Aus Gründen, die in Abschnitt 4.5.4 genauer erläutert werden, ist es für hier angestrebte Rechnung ausreichend, nur einen Anteil des K^0_L zu berechnen. Daher wird lediglich der Zerfall

$$\overline{K}^0 \to e^+ \, \mu^- \tag{4.2}$$

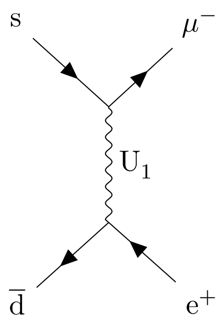


ABBILDUNG 4.1.: Feynman-Graph des hier betrachteten Zerfalls eines $\overline{\mathrm{K}}^0$-Mesons in ein Positron-Myon-Paar. Der Graph wurde mithilfe von [5] erstellt.

eines Anti-K^0 in ein Positron und ein Myon genauer untersucht. Dieser findet durch Austausch eines virtuellen U_1-Vektor-Leptoquarks statt, wie in Abbildung 4.1 dargestellt. Es handelt sich hierbei um ein t-Kanal-Diagramm.

4.2. Feynman-Regeln

Mithilfe der in [2, Gleichung 19] angegebenen Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \supset\ &+ (V x^{\mathrm{LL}} U)_{ij} \overline{u}^i_{\mathrm{L}} \gamma^\mu U_{1,\mu} \nu^j_{\mathrm{L}} + x^{\mathrm{LL}}_{ij} \overline{d}^i_{\mathrm{L}} \gamma^\mu U_{1,\mu} e^j_{\mathrm{L}} \\ &+ x^{\mathrm{RR}}_{ij} \overline{d}^i_{\mathrm{R}} \gamma^\mu U_{1,\mu} e^j_{\mathrm{R}} + x^{\overline{\mathrm{RR}}}_{ij} \overline{u}^i_{\mathrm{R}} \gamma^\mu U_{1,\mu} \nu^j_{\mathrm{R}} + \text{h.c.}\end{aligned} \tag{4.3}$$

können die Feynman-Regeln zur Berechnung des Übergangsmatrixelementes abgeleitet werden. Hierbei bezeichnen u^i und d^i die Spinoren der i-ten Up- und Down-Quark-Generation, U_1 das U_1-Leptoquarkfeld, γ^μ die Gamma-Matrizen, U die Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata-Mischungsmatrix (PMNS), V die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Mischungsmatrix (CKM) und x^{XX} die Kopplungsmatrizen des Vektor-Leptoquarks mit Quark-Lepton-Paaren [vergleiche 2, Abschnitt 1.1]. Auf sie wird in Abschnitt 4.2.1 noch näher eingegangen Die Indizes L und R geben die Chiralität der Spinoren an und „h.c.“ steht für das hermitesch adjungierte des vorherigen Ausdrucks. Es wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet und über paarweise hoch- und tiefstehende Indizes summiert.

4.2.1. Kopplungsmatrizen

Die Kopplungsmatrizen werden diagonal angenommen. Nach [7, Abschnitt 3] entspricht die Kopplung derjenigen der starken Wechselwirkung:

$$x^{\mathrm{LL}} = x^{\mathrm{RR}} = \frac{g_{\mathrm{s}}}{\sqrt{2}} \cdot \mathbb{1}_3 = \sqrt{2\pi\alpha_{\mathrm{s}}} \cdot \mathbb{1}_3\,, \tag{4.4}$$

wobei $g_\mathrm{s} = \sqrt{4\pi\alpha_\mathrm{s}}$ die Eichkopplung der starken Wechselwirkung bezeichnet, mit α_s als deren Kopplungskonstante [14, Seite 259].

Die starke Kopplung ist jedoch nicht konstant, sie läuft mit der Energieskala, auf der sie betrachtet wird. Der Wert auf der Skala der Masse m_LQ des betrachteten Leptoquarks liegt nach [14, Abschnitt 17.2] bei

$$\alpha_\mathrm{s}(m_\mathrm{LQ}) = \frac{\alpha_\mathrm{s}(m_\mathrm{Z})}{1 + 14 \cdot \alpha_\mathrm{s}(m_\mathrm{Z}) \cdot \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{m_\mathrm{LQ}}{m_\mathrm{Z}}\right)} \,. \tag{4.5}$$

Die numerischen Werte für die Masse des Z-Bosons m_Z und den Wert der Kopplung bei dieser Masse $\alpha_\mathrm{s}(m_\mathrm{Z})$ sind Anhang A zu entnehmen.

4.2.2. Propagatoren

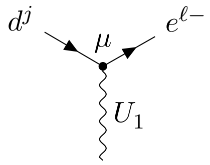
Da es sich bei dem U_1-Vektor-Leptoquark um ein Boson handelt, kann der übliche Bosonpropagator für Spin-1-Teilchen

$$D_{\mu\nu} = \frac{-g_{\mu\nu}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{4.6}$$

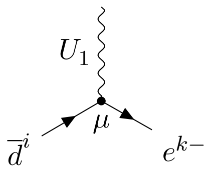
verwendet werden. Er ist im Impulsraum und in der 't-Hooft-Feynman-Eichung angegeben [1, Abschnitt 4.4.1]. Hierbei ist $g_{\mu\nu}$ der metrische Tensor, p der Viererimpuls des Bosons, m seine Masse und ε ein infinitessimaler reeller Regulator.

4.2.3. Vertices

Aus der Lagrange-Dichte lassen sich, zum Beispiel nach [4, Abschnitt 4.3.7], die Vertexregeln ableiten. Für den hier betrachteten Zerfall findet man die beiden Vertices



$$= \quad \mathrm{i}x_{j\ell}^{\mathrm{LL}*} P_\mathrm{R}\gamma^\mu P_\mathrm{L} + \mathrm{i}x_{j\ell}^{\mathrm{RR}*} P_\mathrm{L}\gamma^\mu P_\mathrm{R} \,, \tag{4.7}$$



$$= \quad \mathrm{i}x_{ik}^{\mathrm{LL}} P_\mathrm{R}\gamma^\mu P_\mathrm{L} + \mathrm{i}x_{ik}^{\mathrm{RR}} P_\mathrm{L}\gamma^\mu P_\mathrm{R} \,. \tag{4.8}$$

4.3. Effektive Theorie

Um später die Zerfallsbreite des Prozesses allgemeiner berechnen zu können, soll zu einer *effektiven Theorie* übergegangen werden. Dazu wird zunächst das Übergangsmatrixelement $\mathcal{M}$ allgemein bestimmt.

4.3.1. Streumatrix

Die Streumatrix (englisch *scattering matrix*) S beschreibt einen Streuprozess gemäß

$$|\mathrm{in}\rangle = S\,|\mathrm{out}\rangle\ . \tag{4.9}$$

Die Matrixelemente erhält man folglich mithilfe von

$$S_{\mathrm{fi}} = \langle \mathrm{in}|\mathrm{out}\rangle = \langle \mathrm{out}|\,S\,|\mathrm{out}\rangle\ , \tag{4.10}$$

wobei i für „initial" und f für „final" steht. Sie lässt sich zerlegen in einen Einheitsanteil, der einen Nichtstreuprozess beschreibt, und eine Übergangsmatrix (englisch *transition matrix*) T, welcher die tatsächliche Streuung mit unterschiedlichen Ein- und Ausgangszuständen beschreibt.

$$S = \mathbb{1} + \mathrm{i}T\,. \tag{4.11}$$

Vom der T-Matrixelement lässt sich nun auch noch die Viererimpulserhaltung abspalten und man erhält die *Feynman-Amplitude* $\mathcal{M}_{\mathrm{fi}}$ nach

$$\mathrm{i}T_{\mathrm{fi}} = \mathrm{i}\mathcal{M}_{\mathrm{fi}} \cdot (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_{\text{initial}} p_i - \sum_{\text{final}} k_f\right). \tag{4.12}$$

Hier sind p_i die Impulse der einlaufenden und k_f die der auslaufenden Teilchen.

Näheres zur Streumatrix ist zum Beispiel [4, Abschnitt 4.2.5] zu entnehmen.

4.3.2. Aufstellen der Feynman-Amplitude

Um die Feynman-Amplitude für einen Prozess aufzustellen, werden die folgenden Schritte nach [4, Abschnitt 10.1] durchgeführt.

Zu Beginn zeichnet man alle zusammenhängenden Feynmangraphen der gewünschten Ordnung mit den entsprechenden äußeren Linien und versieht sie mit eindeutigen Impulsen. Für den oben genannten Prozess existiert, wie in Abschnitt 4.1 bereits erwähnt, nur ein Graph erster Ordnung, welcher das hier betrachtete U_1-Boson enthält. Prinzipiell gäbe es noch einen Graphen mit vertauschten Leptongeneration-Indizes, da aber die Kopplung in Gleichung 4.4 als diagonal angenommen wurde, also keine Generationenmischung am Vertex auftritt, fällt immer einer der beiden Graphen weg oder beide sind identisch. Der verbleibende t-Kanal Graph wurde in Abbildung 4.2 gezeichnet.

Beim Bilden der Fermionenketten werden die Fermionen *entgegen* der Fermionpfeilrichtung abgelesen und die Spinoren multipliziert. Einlaufende Fermionen werden durch u, auslaufende durch $\overline{u}$, einlaufende Antifermionen durch $\overline{v}$, auslaufende durch v dargestellt. Trifft man auf einen Vertex, so wird der entsprechende Vertexfaktor aus Abschnitt 4.2.3 (Gleichungen 4.7 und 4.8) eingesetzt. Für interne Bosonlinien

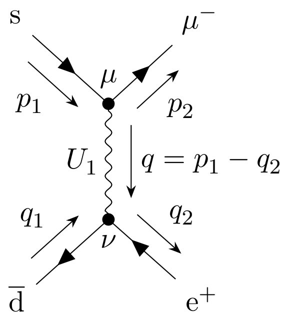


ABBILDUNG 4.2.: Feynman-Graph des betrachteten Kaon-Zerfalls mit festgelegten Impulsen und benannten Vertices. Der Graph wurde mithilfe von [5] erstellt.

wird der Propagator aus Abschnitt 4.2.2 (Gleichung 4.6) eingesetzt. Es ergibt sich dadurch die Feynman-Amplitude

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\mathcal{M} = \overline{u}^{\mu}(q_1)\,\mathrm{i}\Big(&x_{22}^{\mathrm{LL}*}P_{\mathrm{R}}\gamma^{\mu}P_{\mathrm{L}} + x_{22}^{\mathrm{RR}*}P_{\mathrm{L}}\gamma^{\mu}P_{\mathrm{R}}\Big)\,u^{\mathrm{s}}(p_1)\\ &\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 - m_{\mathrm{LQ}}^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\overline{v}^{\mathrm{d}}(p_2)\,\mathrm{i}\Big(x_{11}^{\mathrm{LL}}P_{\mathrm{R}}\gamma^{\nu}P_{\mathrm{L}} + x_{11}^{\mathrm{RR}}P_{\mathrm{L}}\gamma^{\nu}P_{\mathrm{R}}\Big)\,v^{\mathrm{e}}(q_2)\,,\end{aligned} \tag{4.13}$$

wobei m_{LQ} die Masse des U_1 Vektor-Leptoquarks angibt.

4.3.3. Fierz-Transformation

Die Feynman-Amplitude kann nun noch vereinfacht werden. Dazu werden vor allem Identitäten zu den Gamma-Matrizen und Projektionsoperatoren verwendet, wie sie in Abschnitt 2.2 angegeben sind.

Da das U_1-Teilchen sehr schwer im Vergleich zum Kaon erwartet wird, kann sein Impuls im Propagator vernachlässigt werden. Fast die gesamte Energie des Kaons wird in dessen Masse stecken. Da nun der Bruch keinen Pol mehr hat, kann auch noch der Regulator verworfen werden:

$$\frac{1}{q^2 - m_{\mathrm{LQ}}^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \quad \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{q^2 \ll m_{\mathrm{LQ}}^2} \quad -\frac{1}{m_{\mathrm{LQ}}^2}\,. \tag{4.14}$$

Anschließend werden alle Terme aus Gleichung 4.13 ausmultipliziert und die Projektionsoperatoren gemäß Gleichungen 2.8 auf die Spinoren angewandt. Der metrische Tensor wurde angewandt, um den ν-Index zu senken und die Impulsargumente unterdrückt, da die Spinoren durch ihren Teilchenindex bereits eindeutig zu identifizieren sind.

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\mathcal{M} = -\frac{1}{m_{\mathrm{LQ}}^2}\Big(&x_{11}^{\mathrm{LL}}x_{22}^{\mathrm{LL}*}\left(\overline{u}_{\mathrm{L}}^{\mu}\gamma^{\mu}u_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}}\right)\left(\overline{v}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}}\gamma_{\mu}v_{\mathrm{L}}^{\mathrm{e}}\right) + x_{11}^{\mathrm{RR}}x_{22}^{\mathrm{LL}*}\left(\overline{u}_{\mathrm{L}}^{\mu}\gamma^{\mu}u_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}}\right)\left(\overline{v}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}}\gamma_{\mu}v_{\mathrm{R}}^{\mathrm{e}}\right)\\ &+x_{11}^{\mathrm{LL}}x_{22}^{\mathrm{RR}*}\left(\overline{u}_{\mathrm{R}}^{\mu}\gamma^{\mu}u_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}\right)\left(\overline{v}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}}\gamma_{\mu}v_{\mathrm{L}}^{\mathrm{e}}\right) + x_{11}^{\mathrm{RR}}x_{22}^{\mathrm{RR}*}\left(\overline{u}_{\mathrm{R}}^{\mu}\gamma^{\mu}u_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}\right)\left(\overline{v}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}}\gamma_{\mu}v_{\mathrm{R}}^{\mathrm{e}}\right)\Big)\,.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Es haben sich nun stets Paare von Quarks mit Leptonen gebildet. Diese sollen nun zu Paaren von Quarks und Paaren von Leptonen umsortiert werden. Dazu wird eine sogenannte *Fierz-Transformation* [6] angewandt. Die folgende Definition der kovarianten Bilineare orientiert sich an [11, Abschnitt 3.4.4].

$$\begin{aligned}
\hat{s}(a,b;c,d) &:= \big(ab\big)\,\big(cd\big) && \text{(Skalar)}\\
\hat{v}(a,b;c,d) &:= \big(a\gamma^{\mu}b\big)\,\big(c\gamma_{\mu}d\big) && \text{(Vektor)}\\
\hat{t}(a,b;c,d) &:= \frac{1}{2}\big(a\sigma^{\mu\nu}b\big)\,\big(c\sigma_{\mu\nu}d\big) && \text{(Tensor)}\\
\hat{a}(a,b;c,d) &:= \big(a\gamma^{5}\gamma^{\mu}b\big)\,\big(c\gamma_{\mu}\gamma^{5}d\big) && \text{(Axialvektor)}\\
\hat{p}(a,b;c,d) &:= \big(a\gamma^{5}b\big)\,\big(c\gamma^{5}d\big) && \text{(Pseudoskalar)}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Nun lassen sich die einzelnen Vierervektoren der Bilineare gemäß

$$\left[\begin{pmatrix}\hat{s}\\ \hat{v}\\ \hat{t}\\ \hat{a}\\ \hat{p}\end{pmatrix}\right](a,b;c,d) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4\\ 6 & 0 & -1 & 0 & 6\\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\hat{s}\\ \hat{v}\\ \hat{t}\\ \hat{a}\\ \hat{p}\end{pmatrix}\right](a,d;c,b) \tag{4.17}$$

umsortieren.

Die Amplitude aus Gleichung 4.15 lässt sich mithilfe der Bilineare aus den Gleichungen 4.16 auch als

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\mathcal{M} = -\frac{1}{m_{\mathrm{LQ}}^2}\Big(& x_{11}^{\mathrm{LL}}x_{22}^{\mathrm{LL}*}\,\hat{v}(\overline{u}_{\mathrm{L}}^{\mu},u_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}};\overline{v}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}},v_{\mathrm{L}}^{\mathrm{e}}) + x_{11}^{\mathrm{RR}}x_{22}^{\mathrm{LL}*}\,\hat{v}(\overline{u}_{\mathrm{L}}^{\mu},u_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}};\overline{v}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}},v_{\mathrm{R}}^{\mathrm{e}})\\
&+x_{11}^{\mathrm{LL}}x_{22}^{\mathrm{RR}*}\,\hat{v}(\overline{u}_{\mathrm{R}}^{\mu},u_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}};\overline{v}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}},v_{\mathrm{L}}^{\mathrm{e}}) + x_{11}^{\mathrm{RR}}x_{22}^{\mathrm{RR}*}\,\hat{v}(\overline{u}_{\mathrm{R}}^{\mu},u_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}};\overline{v}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}},v_{\mathrm{R}}^{\mathrm{e}})\Big)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

schreiben. Nun wird die Fierz-Transformation Gleichung 4.17 so durchgeführt, dass immer Paare von Spinoren mit Quark-Indizes und Paare von Spinoren mit Lepton-Indizes auftreten.

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\mathcal{M} = -\frac{1}{m_{\mathrm{LQ}}^2}\Bigg[& x_{11}^{\mathrm{LL}}x_{22}^{\mathrm{LL}*}\,\Big(\hat{s}(\underbrace{\overline{u}_{\mathrm{L}}^{\mu},v_{\mathrm{L}}^{\mathrm{e}};\overline{v}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}},u_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}}}_{=:\alpha}) - \frac{1}{2}\hat{v}(\alpha) + \frac{1}{2}\hat{a}(\alpha) - \hat{p}(\alpha)\Big)\\
&+ x_{11}^{\mathrm{RR}}x_{22}^{\mathrm{LL}*}\,\Big(\hat{s}(\underbrace{\overline{u}_{\mathrm{L}}^{\mu},v_{\mathrm{R}}^{\mathrm{e}};\overline{v}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}},u_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}}}_{=:\beta}) - \frac{1}{2}\hat{v}(\beta) + \frac{1}{2}\hat{a}(\beta) - \hat{p}(\beta)\Big)\\
&+ x_{11}^{\mathrm{LL}}x_{22}^{\mathrm{RR}*}\,\Big(\hat{s}(\underbrace{\overline{u}_{\mathrm{R}}^{\mu},v_{\mathrm{L}}^{\mathrm{e}};\overline{v}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}},u_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}}_{=:\gamma}) - \frac{1}{2}\hat{v}(\gamma) + \frac{1}{2}\hat{a}(\gamma) - \hat{p}(\gamma)\Big)\\
&+ x_{11}^{\mathrm{RR}}x_{22}^{\mathrm{RR}*}\,\Big(\hat{s}(\underbrace{\overline{u}_{\mathrm{R}}^{\mu},v_{\mathrm{R}}^{\mathrm{e}};\overline{v}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}},u_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}}_{=:\delta}) - \frac{1}{2}\hat{v}(\delta) + \frac{1}{2}\hat{a}(\delta) - \hat{p}(\delta)\Big)\Bigg].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

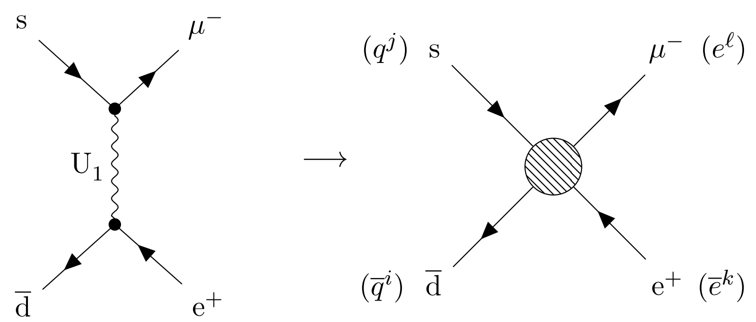


ABBILDUNG 4.3.: Übergang zu einer effektiven Theorie. Der Graph wurde mithilfe von [5] erstellt.

Die einzelnen Summanden lassen sich noch weiter vereinfachen und man erhält am Ende die Feynman-Amplitude

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\mathcal{M} = -\frac{1}{m_{\mathrm{LQ}}^2}\Big(&\frac{1}{2}x_{11}^{\mathrm{LL}}x_{22}^{\mathrm{LL}*}\,\hat{v}(\overline{u}_{\mathrm{L}}^{\mu}, v_{\mathrm{L}}^{\mathrm{e}}; \overline{v}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}}, u_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}}) - x_{11}^{\mathrm{RR}}x_{22}^{\mathrm{LL}*}\,\hat{s}(\overline{u}_{\mathrm{L}}^{\mu}, v_{\mathrm{R}}^{\mathrm{e}}; \overline{v}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}}, u_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}}) \\ &-x_{11}^{\mathrm{LL}}x_{22}^{\mathrm{RR}*}\,\hat{s}(\overline{u}_{\mathrm{R}}^{\mu}, v_{\mathrm{L}}^{\mathrm{e}}; \overline{v}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{d}}, u_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}) + \frac{1}{2}x_{11}^{\mathrm{RR}}x_{22}^{\mathrm{RR}*}\,\hat{v}(\overline{u}_{\mathrm{R}}^{\mu}, v_{\mathrm{R}}^{\mathrm{e}}; \overline{v}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{d}}, u_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}})\Big)\,. \end{aligned} \tag{4.20}$$

4.3.4. Wilson-Koeffizienten

Da Kaonen keine elementaren Teilchen sind, müsste bei dem Zerfall auch die starke Wechselwirkung beachtet werden. Um den Zerfall des gebundenen Zustandes einfacher beschreiben zu können, wird zu einer *effektiven Theorie* übergegangen. Dies ist schematisch in Abbildung 4.3 dargestellt. Dabei geht die Lagrange-Dichte in eine effektive Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}_{\text{eff}} \propto \sum_i c_i \mathcal{O}_i \tag{4.21}$$

über, die aus Operatoren $\mathcal{O}_i$ aufgebaut ist, welche den effektiven Vertex aus Abbildung 4.3 beschreibt. Sie sind lokale Vier-Fermion-Operatoren, die aus den leichten Quarks und Leptonen konstruiert werden. Deren Koeffizienten c_i werden *Wilson-Koeffizienten* genannt. In ihnen steckt die Abhängigkeit der schweren Quarks und Leptonen [15]. Als Basis werden hier nach [2, Gleichung 52] chirale Kombinationen der Bilineare aus den Gleichungen 4.16 verwendet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} \propto &\sum_{X,Y=\mathrm{L,R}} c^{XY}\cdot\hat{v}(\overline{q}_X^i, q_X^j; \overline{e}_Y^k, e_Y^\ell) + \sum_{\substack{X=\mathrm{L,R}\\ Y\,\text{entgegengesetzt}}} h^{XX}\cdot\hat{t}(\overline{q}_X^i, q_Y^j; \overline{e}_X^k, e_Y^\ell) \\ &+ \sum_{\substack{X=\mathrm{L,R}\\ Y\,\text{entgegengesetzt}}}\Big[g^{XX}\cdot\hat{s}(\overline{q}_X^i, q_Y^j; \overline{e}_X^k, e_Y^\ell) + g^{XY}\cdot\hat{s}(\overline{q}_X^i, q_Y^j; \overline{e}_Y^k, e_X^\ell)\Big] + \text{h.c.}\,, \end{aligned} \tag{4.22}$$

wobei q^i für einen Quarkspinor, sowie e^i für einen Leptonspinor der i-ten Generation steht. Die für diesen Zerfall gewählte Anordnung ist ebenfalls in Abbildung 4.3 eingetragen. Es sind $i = k = 1$, sowie $j = \ell = 2$ die Leptongenerationen, wie sie in Abbildung 4.3 zugeordnet sind.

Um vergleichbare Koeffizienten mit [2, Tabelle 4] zu erhalten, werden noch einige Faktoren ausgeklammert. Der Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes v hängt mit der Fermischen Kopplungskonstante G_F über

$$v = \left(\sqrt{2} \cdot G_\mathrm{F}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{v^2} = \frac{2G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}} \tag{4.23}$$

zusammen.

Die Feynman-Amplitude lässt sich also auch schreiben als

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\mathcal{M} = -\frac{4G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}} \cdot \Bigg[& \\ & \underbrace{\frac{v^2}{2m_\mathrm{LQ}^2} x_{11}^\mathrm{LL} x_{22}^\mathrm{LL*}}_{=:\, c^\mathrm{LL}} \hat{v}(\overline{u}_\mathrm{L}^\mu, v_\mathrm{L}^\mathrm{e}; \overline{v}_\mathrm{L}^\mathrm{d}, u_\mathrm{L}^\mathrm{s}) - \underbrace{\frac{v^2}{m_\mathrm{LQ}^2} x_{11}^\mathrm{RR} x_{22}^\mathrm{LL*}}_{=:\, g^\mathrm{RL}} \hat{s}(\overline{u}_\mathrm{L}^\mu, v_\mathrm{R}^\mathrm{e}; \overline{v}_\mathrm{R}^\mathrm{d}, u_\mathrm{L}^\mathrm{s}) \\ & \underbrace{- \frac{v^2}{m_\mathrm{LQ}^2} x_{11}^\mathrm{LL} x_{22}^\mathrm{RR*}}_{=:\, g^\mathrm{LR}} \hat{s}(\overline{u}_\mathrm{R}^\mu, v_\mathrm{L}^\mathrm{e}; \overline{v}_\mathrm{L}^\mathrm{d}, u_\mathrm{R}^\mathrm{s}) + \underbrace{\frac{v^2}{2m_\mathrm{LQ}^2} x_{11}^\mathrm{RR} x_{22}^\mathrm{RR*}}_{=:\, c^\mathrm{RR}} \hat{v}(\overline{u}_\mathrm{R}^\mu, v_\mathrm{R}^\mathrm{e}; \overline{v}_\mathrm{R}^\mathrm{d}, u_\mathrm{R}^\mathrm{s}) \Bigg] . \end{aligned} \tag{4.24}$$

Vergleicht man sie mit [2, Gleichung 52], so findet man für das U_1 die Wilson-Koeffizienten c^LL, c^RR, g^RL und g^LR. Alle anderen Koeffizienten verschwinden.

4.4. Berechnen der Feynman-Amplitude

Nun soll die Feynman-Amplitude für die effektive Theorie tatsächlich ausgewertet werden. Hierfür wird eine Formel aus [3] verwendet, da auch dort Mesonenzerfälle mithilfe von Wilson-Koeffizienten berechnet werden. Da in dieser Arbeit andere Operatoren gewählt wurden, um die effektive Lagrange-Dichte zu formulieren, muss ein Operatorbasiswechsel durchgeführt werden.

4.4.1. Operatorbasiswechsel

Zusätzlich zu der in Gleichung 4.24 verwendeten *chiralen Basis* wird in [2, Gleichung 53] eine weitere Parametrisierung der Lagrange-Dichte angegeben, welche hier *Meson-Basis* genannt wird. Sie erhält ein hochgestelltes (M). Der relevante Teil lautet

$$\mathcal{L}^\mathrm{(M)} \supset -\frac{4G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}} \lambda_q \Bigg[\sum_{X\,=\,9,10,\mathrm{S},\mathrm{P}} \left(C_X^{\mathrm{(M)}\,ij;k\ell} \mathcal{O}_X^{\mathrm{(M)}\,ij;k\ell} + C_{X'}^{\mathrm{(M)}\,ij;k\ell} \mathcal{O}_{X'}^{\mathrm{(M)}\,ij;k\ell} \right) \Bigg] + \mathrm{h.c.}\,. \tag{4.25}$$

Dabei sind die Operatoren nach [2, Gleichung 54] definiert als

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{M})\,k\ell} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\overline{q}^i P_{\mathrm{R}} q^j\right)\left(\overline{e}^k e^\ell\right), &\quad \mathcal{O}_{\mathrm{P}}^{(\mathrm{M})\,ij;k\ell} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\overline{q}^i P_{\mathrm{R}} q^j\right)\left(\overline{e}^k \gamma^5 e^\ell\right), \\
\mathcal{O}_{9}^{(\mathrm{M})\,ij;k\ell} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\overline{q}^i \gamma^\mu P_{\mathrm{L}} q^j\right)\left(\overline{e}^k \gamma_\mu e^\ell\right), &\quad \mathcal{O}_{10}^{(\mathrm{M})\,ij;k\ell} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\overline{q}^i \gamma^\mu P_{\mathrm{L}} q^j\right)\left(\overline{e}^k \gamma_\mu \gamma^5 e^\ell\right).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Die gestrichenen Operatoren $X' = \mathrm{S}', \mathrm{P}', 9', 10'$ gehen hierbei durch Vertauschen von P_{L} und P_{R} aus den ungestrichenen hervor. Es sind q^i Quark-Spinoren der i-ten Generation und e^i Lepton-Spinoren der i-ten Generation. Andere Operatoren treten nicht auf, da die oben genannten die einzigen sind, mit den in Gleichung 4.24 gefundenen Koeffizienten auftreten, wie später noch aufgeführt wird. Die Formel zur Umrechnung der Wilson-Koeffizienten aus der chiralen in die Meson-Basis wird in [2, Gleichung 55] gegeben:

$$\begin{aligned}
C_{9,10}^{(\mathrm{M})} &= \frac{2\pi}{\alpha_{\mathrm{em}}\lambda_q}\left(c^{\mathrm{LR}} \pm c^{\mathrm{LL}}\right), &\quad C_{9',10'}^{(\mathrm{M})} &= \frac{2\pi}{\alpha_{\mathrm{em}}\lambda_q}\left(c^{\mathrm{RR}} \pm c^{\mathrm{RL}}\right), \\
C_{\mathrm{S,P}}^{(\mathrm{M})} &= \frac{2\pi}{\alpha_{\mathrm{em}}\lambda_q}\left(g^{\mathrm{LL}} \pm g^{\mathrm{LR}}\right), &\quad C_{\mathrm{S',P'}}^{(\mathrm{M})} &= \frac{2\pi}{\alpha_{\mathrm{em}}\lambda_q}\left(g^{\mathrm{RL}} \pm g^{\mathrm{RR}}\right).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Hier ist $\alpha_{\mathrm{em}} = e^2/(4\pi)$ die elektromagnetische Kopplung. Bei den hier betrachteten Energieskalen kann sie als konstant angenommen werden. Da sich der Faktor λ_q später herauskürzt, ist er für die hier folgende Rechnung nicht von Interesse; für seine Bedeutung sei auf [2, Abschnitt 3.2] verwiesen.

In [3, Gleichung 5] wird die Hamilton-Dichte jedoch nach

$$\mathcal{H}^{(\mathrm{D})} = \frac{1}{16\pi^2} \sum_{X,Y=\mathrm{L,R}} \left(C_{\mathrm{S}XY}^{(\mathrm{D})}\mathcal{O}_{\mathrm{S}XY}^{(\mathrm{D})} + C_{\mathrm{V}XY}^{(\mathrm{D})}\mathcal{O}_{\mathrm{V}XY}^{(\mathrm{D})} + C_{\mathrm{T}X}^{(\mathrm{D})}\mathcal{O}_{\mathrm{T}X}^{(\mathrm{D})}\right) \tag{4.28}$$

parametrisiert. Diese Basis wird im Folgenden „Dreiner-Basis“ genannt und erhält ein hochgestelltes (D). Die Operatoren sind hierbei

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mathrm{S}XY}^{(\mathrm{D})} &= \left(\overline{q}^i P_X q^j\right)\left(\overline{e}^k P_Y e^\ell\right), &\quad \mathcal{O}_{\mathrm{V}XY}^{(\mathrm{D})} &= \left(\overline{q}^i \gamma^\mu P_X q^j\right)\left(\overline{e}^k \gamma_\mu P_Y e^\ell\right), \\
\mathcal{O}_{\mathrm{T}XY}^{(\mathrm{D})} &= \frac{1}{2}\left(\overline{q}^i \sigma^{\mu\nu} P_X q^j\right)\left(\overline{e}^k \sigma_{\mu\nu} e^\ell\right).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Um die Wilson-Koeffizienten aus der Meson-Basis in der Dreiner-Basis verwenden zu können, müssen die Operatorbasen miteinander in Beziehung gesetzt werden. Durch Addieren zweier Meson-Basis-Operatoren erhält man einen Operator der Dreiner-Basis:

$$\mathcal{O}_{\mathrm{S}'}^{(\mathrm{M})} + \mathcal{O}_{\mathrm{P}'}^{(\mathrm{M})} = \frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\overline{q}^i P_{\mathrm{L}} q^j\right)\left(\overline{e}^k \underbrace{\left(1+\gamma^5\right)}_{2P_{\mathrm{R}}} e^\ell\right) = 2\frac{e^2}{(4\pi)^2}\mathcal{O}_{\mathrm{SLR}}^{(\mathrm{D})}. \tag{4.30}$$

So ergeben sich folgende Umrechnungsformeln für die beiden Operatorsätze

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{SLL,SLR}} &= \frac{8\pi^2}{e^2}\left(\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{\mathrm{S'}} \mp \mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{\mathrm{P'}}\right), \quad \mathcal{O}^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{SRR,SRL}} = \frac{8\pi^2}{e^2}\left(\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{\mathrm{S}} \pm \mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{\mathrm{P}}\right), \\ \mathcal{O}^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{VLL,VLR}} &= \frac{8\pi^2}{e^2}\left(\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{9} \mp \mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{10}\right), \quad \mathcal{O}^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{VRR,VRL}} = \frac{8\pi^2}{e^2}\left(\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{9'} \pm \mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{10'}\right). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Alle anderen Operatoren tragen nicht bei.

Die Umrechnungsformeln für die Wilson-Koeffizienten können nun durch einen Koeffizientenvergleich der beiden Hamiltondichten ermittelt werden. Dazu werden beide Hamiltondichten ausgeschrieben und die Operatoren der Dreiner-Basis durch diejenigen der Meson-Basis ersetzt.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(\mathrm{D})} &= \frac{1}{16\pi^2}\left[C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{SLL}}\mathcal{O}^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{SLL}} + \cdots + C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{VLL}}\mathcal{O}^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{VLL}} + \cdots\right] \\ &= \begin{aligned} &\frac{1}{16\pi^2}C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{SLL}}\frac{8\pi^2}{e^2}\left(\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{\mathrm{S'}} - \mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{\mathrm{P'}}\right) + \cdots \\ &+ \frac{1}{16\pi^2}C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{VLL}}\frac{8\pi^2}{e^2}\left(\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{9} - \mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{10}\right) + \cdots, \end{aligned} \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(\mathrm{M})} = -\mathcal{L}^{(\mathrm{M})} = 2\frac{\lambda_q}{v^2}\Big[&C^{(\mathrm{M})}_{9}\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{9} + C^{(\mathrm{M})}_{9'}\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{9'} + C^{(\mathrm{M})}_{10}\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{10} + C^{(\mathrm{M})}_{10'}\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{10'} \\ &C^{(\mathrm{M})}_{\mathrm{S}}\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{\mathrm{S}} + C^{(\mathrm{M})}_{\mathrm{S'}}\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{\mathrm{S'}} + C^{(\mathrm{M})}_{\mathrm{P}}\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{\mathrm{P}} + C^{(\mathrm{M})}_{\mathrm{P'}}\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{\mathrm{P'}}\Big]. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Vergleicht man nun beispielhaft die Koeffizienten des Operatoren $\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{9}$ und setzt die chiralen Koeffizienten aus den Gleichungen 4.27 ein, so erhält man

$$\frac{1}{2e^2}\left(C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{VLL}} + C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{VLR}}\right) = 2\frac{\lambda_q}{v^2}C^{(\mathrm{M})}_{9} \tag{4.34}$$

$$C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{VLL}} + C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{VLR}} = \frac{32\pi^2}{v^2}\left(c^{\mathrm{LR}} + c^{\mathrm{LL}}\right). \tag{4.35}$$

Analog findet man für die Koeffizienten von $\mathcal{O}^{(\mathrm{M})}_{10}$ die Gleichung

$$-C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{VLL}} + C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{VLR}} = \frac{32\pi^2}{v^2}\left(c^{\mathrm{LR}} - c^{\mathrm{LL}}\right). \tag{4.36}$$

Ebenso findet man Gleichungssysteme für die anderen Operatoren. Durch Subtraktion der Gleichungen 4.35 und 4.36 ergibt sich letztendlich

$$C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{VLL}} = \frac{32\pi^2}{v^2}c^{\mathrm{LL}}. \tag{4.37}$$

Addiert und subtrahiert man so die Geichungssysteme aller Operatoren, so findet man folgende Umrechnungsformeln für die Wilson-Koeffizienten von der chiralen in die Dreiner-Basis

$$C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{V}XY} = \frac{32\pi^2}{v^2}c^{XY}, \qquad C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{S}XY} = \frac{32\pi^2}{v^2}g^{\overline{XY}}, \tag{4.38}$$

wobei $X, Y \in \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}$ und ein Querstrich über einem Index für Vertauschung von L und R steht. Setzt man die in Gleichung 4.24 auftretenden Koeffizienten ein (alle anderen verschwinden), so erhält man

$$\begin{aligned} C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{SLR}} &= \frac{-32\pi^2}{m^2_{\mathrm{LQ}}} x^{\mathrm{RR}}_{11} x^{\mathrm{LL}*}_{22}\,, & C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{SRL}} &= \frac{-32\pi^2}{m^2_{\mathrm{LQ}}} x^{\mathrm{LL}}_{11} x^{\mathrm{RR}*}_{22}\,, \\ C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{VRR}} &= \frac{16\pi^2}{m^2_{\mathrm{LQ}}} x^{\mathrm{RR}}_{11} x^{\mathrm{RR}*}_{22}\,, & C^{(\mathrm{D})}_{\mathrm{VLL}} &= \frac{16\pi^2}{m^2_{\mathrm{LQ}}} x^{\mathrm{LL}}_{11} x^{\mathrm{LL}*}_{22}\,. \end{aligned} \tag{4.39}$$

4.4.2. Amplitudenquadrat

Allgemein lässt sich nach [3, Gleichung 12] das Matrixelement $\mathcal{M}$ als eine Funktion von sogenannten *Formfaktoren* F_X schreiben. Sie treten als Koeffizienten der skalaren, pseudoskalaren, Vektor- und Axialvektorströme (vergleiche Gleichungen 4.16) auf. Somit lässt sich das Matrixelement als

$$(4\pi)^2\mathcal{M} = F_{\mathrm{S}}\bar{e}^k e^\ell + F_{\mathrm{P}}\bar{e}^k\gamma^5 e^\ell + F_{\mathrm{V}} p_\mu \bar{e}^k\gamma^\mu e^\ell + F_{\mathrm{A}} p_\mu \bar{e}^k \gamma^\mu\gamma^5 e^\ell \tag{4.40}$$

schreiben. Dabei ist p^μ der Viererimpuls des Kaons. Die Indizes ℓ und k bezeichnen, wie in Abbildung 4.3 angegeben, die Leptonen des Endzustandes. Der tensorielle Beitrag von $\mathcal{O}_{\mathrm{T}X}$ verschwindet, da als einzige Lorentzstruktur der Viererimpuls des Kaons p^μ auftritt und man daraus keinen antisymmetrischen 2-Tensor konstruieren kann [3].

Die Formfaktoren können als Linearkombination der Wilson-Koeffizienten einer Theorie ausgedrückt werden. Dazu wurden diese in den Gleichungen 4.39 in der richtigen Basis ausgedrückt. Nach [3, Gleichungen 13–16] lauten die Formfaktoren

$$F_{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{i}}{4}\frac{M_K^2 f_K}{m_{q^i} + m_{q^j}}\big(+ C_{\mathrm{SLL}} + C_{\mathrm{SLR}} - C_{\mathrm{SRR}} - C_{\mathrm{SRL}}\big)\,, \tag{4.41}$$

$$F_{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{i}}{4}\frac{M_K^2 f_K}{m_{q^i} + m_{q^j}}\big(- C_{\mathrm{SLL}} + C_{\mathrm{SLR}} - C_{\mathrm{SRR}} + C_{\mathrm{SRL}}\big)\,, \tag{4.42}$$

$$F_{\mathrm{V}} = -\frac{\mathrm{i}}{4} f_K\big(+ C_{\mathrm{VLL}} + C_{\mathrm{VLR}} - C_{\mathrm{VRR}} - C_{\mathrm{VRL}}\big)\,, \tag{4.43}$$

$$F_{\mathrm{V}} = -\frac{\mathrm{i}}{4} f_K\big(- C_{\mathrm{VLL}} + C_{\mathrm{VLR}} - C_{\mathrm{VRR}} + C_{\mathrm{VRL}}\big)\,. \tag{4.44}$$

Dabei bezeichnet M_{K} die Masse des zerfallenden Kaons, f_{K} seine Zerfallskonstante und $m_{q^{i,j}}$ die Massen der Konstituentenquarks des Kaons.

Mithilfe der Formfaktoren aus Gleichungen 4.41 bis 4.44 lässt sich nun das Quadrat der Amplitude nach [3, Gleichung 17] durch

$$\begin{aligned}(4\pi)^2|\mathcal{M}|^2 = 2|F_\mathrm{S}|^2\big(M_K^2 - (m_\ell + m_k)^2\big) \\ + 2|F_\mathrm{P}|^2\big(M_K^2 - (m_\ell - m_k)^2\big) \\ + 2|F_\mathrm{V}|^2\big(M_K^2(m_k - m_\ell)^2 - (m_k^2 - m_\ell^2)^2\big) \\ + 2|F_\mathrm{A}|^2\big(M_K^2(m_k + m_\ell)^2 - (m_k^2 - m_\ell^2)^2\big) \\ + 4\,\mathrm{Re}[F_\mathrm{S}F_\mathrm{V}^*](m_\ell - m_k)\big(M_K^2 + (m_k + m_\ell)^2\big) \\ + 4\,\mathrm{Re}[F_\mathrm{P}F_\mathrm{A}^*](m_\ell + m_k)\big(M_K^2 - (m_k - m_\ell)^2\big)\end{aligned} \tag{4.45}$$

berechnen. Es sind hierbei $m_{\ell,k}$ die Leptonmassen.

4.5. Masseneinschränkung

Um die Theorie mit dem Experiment vergleichen zu können, muss aus der abstrakten Größe „Feynman-Amplitude“ eine physikalische Observable berechnet werden. An Teilchenbeschleunigern wird unter anderem die *Zerfallsbreite* Γ_tot bestimmt. Sie ist ein Maß für die Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit [vergleiche 14, Abschnitt 4.5] und hängt mit der Lebensdauer eines Teilchens zusammen. Genaueres ist Abschnitt 4.5.3 zu entnehmen. Die partielle Zerfallsbreite Γ des betrachteten Kaonzerfalls soll nun mit der U_1-Masse m_LQ als freiem Parameter bestimmt werden, um Einschränkungen an diese zu erhalten.

Bei Zerfällen, deren Zerfallsbreite unterhalb der Messgenauigkeit liegt, gibt diese eine maximale Zerfallsbreite für diesen Prozess an. Wäre er bereits beobachtet worden, so müsste der Messwert größer als die Messgenauigkeit sein. Betrachtet man nun also einen Zerfall, der nicht im Standardmodell, aber in der Leptoquark-Erweiterung durch das U_1-Vektorboson stattfindet, so kann dieser eine Einschränkung an dessen Masse geben.

4.5.1. Kinematik

Zunächst muss die Kinematik des Prozesses betrachtet werden, um die auslaufenden Impulse zu bestimmen. Der Zerfall wird im Schwerpunktsystem des Kaons betrachtet und die Viererimpulse sind wie folgt definiert

$$P^\mu = \begin{pmatrix} M \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad p_1^\mu = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1^2 + p^2} \\ 0 \\ 0 \\ -p \end{pmatrix}, \quad p_2^\mu = \begin{pmatrix} E_2 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_2^2 + p^2} \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}. \tag{4.46}$$

Es gilt Viererimpulserhaltung

$$p_2^2 = (P - p_1)^2 = P^2 + p_1^2 - 2Pp_1 \tag{4.47}$$

und die Teilchen sitzen auf der Massenschale

$$m_2^2 = M^2 + m_1^2 - 2ME_1\,. \tag{4.48}$$

Somit ergibt sich für eine der Energien

$$E_1 = \frac{1}{2M}\left(M^2 + m_1^2 - m_2^2\right). \tag{4.49}$$

So lässt sich ein Impulsquadrat bestimmen

$$\begin{aligned}
p^2 &= E_1^2 - m_1^2 && (4.50)\\
&= \frac{1}{4M^2}\left(M^2 + m_1^2 - m_2^2\right)^2 - m_1^2 && (4.51)\\
&= \frac{1}{4M^2}\left[M^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2M^2m_1^2 - 2M^2m_2^2 - 2m_1^2m_2^2\right] && (4.52)\\
&= \frac{1}{4M^2}\left[\left(M^2 - m_1^2 - m_2^2\right)^2 - 4m_1^2m_2^2\right]. && (4.53)
\end{aligned}$$

4.5.2. Zerfallsbreite

In [18, Gleichung 6.15] ist die Formel für die *differenzielle Zerfallsbreite*

$$\mathrm{d}\mathit{\Gamma} = \frac{1}{32\pi^2}\frac{|\vec{p}|}{M_K^2}|\mathcal{M}|^2\,\mathrm{d}\mathit{\Omega} \tag{4.54}$$

gegeben. Dabei ist $\vec{p}$ einer der auslaufenden Impulse (siehe Gleichung 4.53) und $\mathrm{d}\mathit{\Omega} = \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$ ein differenzielles Raumwinkelelement. Da im Schwerpunksystem des betrachteten Kaons keine Achse ausgezeichnet ist, hängt das Matrixelement auch von keinem Winkel ab. Die Winkel können also einfach ausintegriert werden und man erhält die Zerfallsbreite

$$\mathit{\Gamma} = \frac{1}{8\pi}\frac{|\vec{p}|}{M_K^2}|\mathcal{M}|^2\,. \tag{4.55}$$

4.5.3. Verzweigungsverhältnis

Das Verzweigungsverhältnis (englisch *branching ratio*) $\mathrm{BR}(i)$ gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Zerfall i mit bestimmten Zerfallsprodukten auftritt. Summiert man über die Zerfallsbreiten aller möglichen Zerfälle, erhält man die totale Zerfallsbreite

$$\mathit{\Gamma}_{\mathrm{tot}} = \sum_i \mathit{\Gamma}(i)\,. \tag{4.56}$$

Das Verzweigungsverhältnis ist demnach

$$\mathrm{BR}(i) = \frac{\mathit{\Gamma}(i)}{\mathit{\Gamma}_{\mathrm{tot}}}\,. \tag{4.57}$$

Für Zerfälle, die so selten sind, dass sie experimentell noch nicht nachgewiesen werden konnten, erhält man über die Messgenauigkeit lediglich obere Schranken für deren Verzweigungsverhältnisse. Das U_1-Boson wird vom Standardmodell nicht vorhergesagt. Sollte der hier von ihm vermittelte Zerfall tatsächlich stattfinden, so muss das entsprechende Verzweigungsverhältnis unterhalb der Beobachtungsgrenze liegen, da der Zerfall noch nicht beobachtet worden ist. Ist eine experimentelle Grenze $\mathrm{BR}(i)_{\mathrm{exp}}$ für einen Zerfall i gegeben, so ist der maximale Wert der Zerfallsbreite des betrachteten Zerfalls bei

$$\Gamma(i)_{\mathrm{max}} = \mathrm{BR}(i)_{\mathrm{exp}} \cdot \Gamma_{\mathrm{tot,exp}}\,, \tag{4.58}$$

wobei Γ_{exp} die experimentell ermittelte totale Zerfallsbreite ist.

In [13] sind keine totalen Zerfallsbreiten, sondern nur mittlere Lebensdauern τ gegeben. Während bis zu diesem Punkt alles in natürlichen Einheiten angeben wurde, muss jetzt in das SI-System gewechselt werden, da die mittlere Lebensdauer in Sekunden angegeben wird. Nach [9, Abschnitte 2.5 und 6.1] lässt sich die totale Zerfallsbreite aus der mittleren Lebensdauer gemäß

$$\Gamma_{\mathrm{tot}} = \frac{\hbar}{\tau} \tag{4.59}$$

bestimmen, wobei $\hbar \equiv h/(2\pi)$ die reduzierte Planck-Konstante bezeichnet.

4.5.4. Numerische Berechnung

Mithilfe der Formel für die Zerfallsbreite (Gleichung 4.55), dem Amplitudenquadrat (Gleichung 4.45) und dem auslaufenden Impulsbetrag (Gleichung 4.53) lässt sich nun die Zerfallsbreite für einen Prozess berechnen. Dazu wurde ein Python-Programm[1] geschrieben, welches mithilfe der Bibliotheken SciPy und NumPy aus [12] eine numerische Berechnung durchführt. Die genauen numerischen Werte samt Quellenangaben sind Anhang A zu entnehmen.

Es soll nun eine hier berechnete Zerfallsbreite mit einem experimentell ermittelten Verzweigungsverhältnis verglichen werden. Wie bereits in Abschnitt 4.1 angedeutet, wird ein $\overline{\mathrm{K}}^0$-Zerfall berechnet, um ihn mit Daten eines K^0_L-Zerfalls zu vergleichen. Dies hat folgende Rechtfertigung.

Betrachtet man das $\overline{\mathrm{K}}^0$ im quantenmechanischen Zustandsraum, so lässt es sich als ein Zweiteilchenzsutand von Quarks beschreiben:

$$\left|\overline{\mathrm{K}}^0\right\rangle = \left|\mathrm{s}\bar{\mathrm{d}}\right\rangle\,. \tag{4.60}$$

Das K^0_L ist jedoch ein Überlagerungszustand aus K^0 und $\overline{\mathrm{K}}^0$ entsprechend[2]

$$\left|\mathrm{K}^0_\mathrm{L}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|\mathrm{K}^0\right\rangle - \left|\overline{\mathrm{K}}^0\right\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\bar{\mathrm{s}}\mathrm{d}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\mathrm{s}\bar{\mathrm{d}}\right\rangle\,. \tag{4.61}$$

[1] https://www.python.org/

[2] Die Oszillation zwischen K^0_L und K^0_S wird hier nicht beachtet, da der Effekt für die hier betrachtete Rechnung vernachläsisgbar ist.

Nach Gleichung 4.55 ist für einen Zerfall eines $\overline{\mathrm{K}}^0$ nach Myon und Positron die Zerfallsbreite proportional zu dem entsprechenden Übergangsmatrixelement

$$\Gamma\big(\overline{\mathrm{K}}^0 \to \mathrm{e}^+\,\mu^-\big) \sim \big|\big\langle \mathrm{e}^+\mu^-\big|\overline{\mathrm{K}}^0\big\rangle\big|^2 = \big|\big\langle \mathrm{e}^+\mu^-\big|\mathrm{s}\overline{\mathrm{d}}\big\rangle\big|^2 . \tag{4.62}$$

Betrachtet man nun die entsprechende Zerfallsbreite eines K^0_L, so findet man:

$$\begin{aligned}
\Gamma\big(\mathrm{K}^0_\mathrm{L} \to \mathrm{e}^+\,\mu^-\big) &\sim \big|\big\langle \mathrm{e}^+\mu^-\big|\mathrm{K}^0_\mathrm{L}\big\rangle\big|^2 && (4.63)\\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\big\langle \mathrm{e}^+\mu^-\big|\overline{\mathrm{s}}\mathrm{d}\big\rangle}_{=0} - \frac{1}{\sqrt{2}}\big\langle \mathrm{e}^+\mu^-\big|\mathrm{s}\overline{\mathrm{d}}\big\rangle\right|^2 && (4.64)\\
&= \frac{1}{2}\big|\big\langle \mathrm{e}^+\mu^-\big|\mathrm{s}\overline{\mathrm{d}}\big\rangle\big|^2 . && (4.65)
\end{aligned}$$

Die Kopplungsmatrizen wurden nach Gleichung 4.4 diagonal angenommen; es findet also keine Generationenmischung statt. Für $\langle \mathrm{e}^+\mu^-|\overline{\mathrm{s}}\mathrm{d}\rangle$ müssten das Myon (Generation 2) und das Down-Quark (Generation 1) an einen gemeinsamen Vertex koppeln, da Fermionen nicht an Antifermionen koppeln können. Der Beitrag verschwindet also wegen der nicht vorhandenen Generationenmischung. Da Ladungsumkehr- oder C-Invarianz (englisch *charge conjugation*) gilt, entspricht diese Zerfallsbreite

$$\Gamma\big(\mathrm{K}^0_\mathrm{L} \to \mathrm{e}^+\,\mu^-\big) \sim \frac{1}{2}\big|\big\langle \mathrm{e}^+\mu^-\big|\mathrm{s}\overline{\mathrm{d}}\big\rangle\big|^2 = \frac{1}{2}\big|\big\langle \mathrm{e}^-\mu^+\big|\overline{\mathrm{s}}\mathrm{d}\big\rangle\big|^2 \sim \Gamma\big(\mathrm{K}^0_\mathrm{L} \to \mathrm{e}^-\,\mu^+\big) . \tag{4.66}$$

Der in Tabelle A.3 angegebene Wert für das Verzweigungsverhältnis $\mathrm{BR}(\mathrm{K}^0_\mathrm{L} \to \mathrm{e}^\pm\,\mu^\mp)$ entspricht allerdings der Summe aus beiden Ladungsendzuständen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{BR}\left(\mathrm{K}^0_\mathrm{L} \to \mathrm{e}^\pm\,\mu^\mp\right) &= \frac{\Gamma\big(\mathrm{K}^0_\mathrm{L} \to \mathrm{e}^+\,\mu^-\big) + \Gamma\big(\mathrm{K}^0_\mathrm{L} \to \mathrm{e}^-\,\mu^+\big)}{\Gamma\big(\mathrm{K}^0_\mathrm{L} \to \mathrm{alle}\big)} && (4.67)\\
&\sim \frac{\frac{1}{2}\big|\big\langle \mathrm{e}^+\mu^-\big|\mathrm{s}\overline{\mathrm{d}}\big\rangle\big|^2 + \frac{1}{2}\big|\langle \mathrm{e}^-\mu^+|\overline{\mathrm{s}}\mathrm{d}\rangle\big|^2}{\Gamma\big(\mathrm{K}^0_\mathrm{L} \to \mathrm{alle}\big)} && (4.68)\\
&= \frac{\big|\big\langle \mathrm{e}^+\mu^-\big|\mathrm{s}\overline{\mathrm{d}}\big\rangle\big|^2}{\Gamma\big(\mathrm{K}^0_\mathrm{L} \to \mathrm{alle}\big)} \sim \frac{\Gamma\big(\overline{\mathrm{K}}^0 \to \mathrm{e}^+\,\mu^-\big)}{\Gamma\big(\mathrm{K}^0_\mathrm{L} \to \mathrm{alle}\big)} . && (4.69)
\end{aligned}$$

Somit findet man für diesen speziellen Fall von Gleichung 4.58 eine maximale Zerfallsbreite von

$$\Gamma\big(\overline{\mathrm{K}}^0 \to \mathrm{e}^+\,\mu^-\big)_\mathrm{max} = \mathrm{BR}\left(\mathrm{K}^0_\mathrm{L} \to \mathrm{e}^\pm\,\mu^\mp\right)_\mathrm{exp} \cdot \Gamma\big(\mathrm{K}^0_\mathrm{L} \to \mathrm{alle}\big)_\mathrm{exp} . \tag{4.70}$$

Das „alle“ steht hierbei für alle möglichen Endzustände und entspricht der totalen Zerfallsbreite aus Gleichung 4.56.

Berechnet wurde also der Zerfall eines $\overline{\mathrm{K}}^0$ in ein Positron und eine Myon. Der Feynmangraph ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Die Zerfallsbreite in Abhängigkeit der U_1-Masse ist zusammen mit experimentell ermittelten Grenzen aus K^0_L-Zerfällen in Abbildung 4.4 dargestellt.

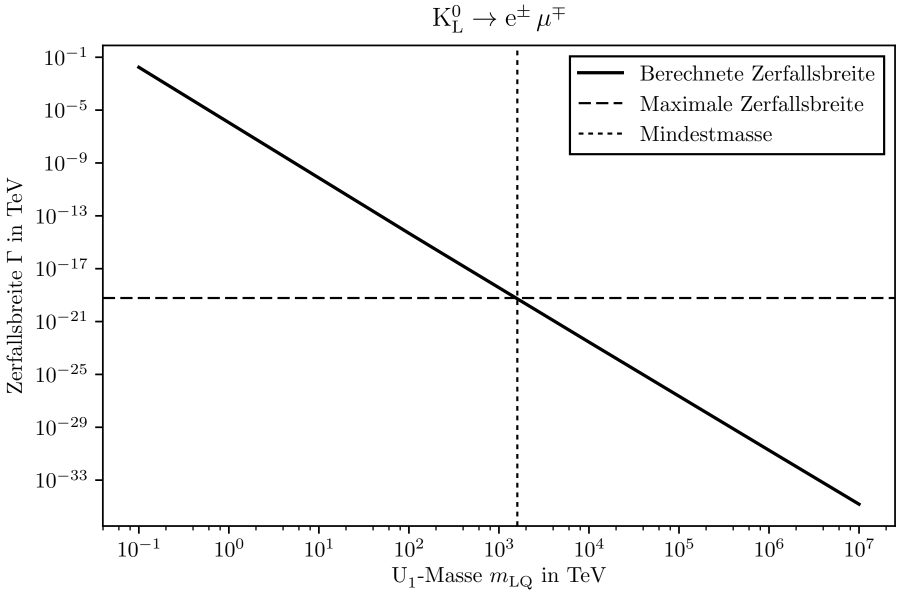


ABBILDUNG 4.4.: Summe der Zerfallsbreiten der Prozesse $K_L^0 \to e^\pm \mu^\mp$ für beide Ladungsendzustände in Abhängigkeit der Masse des U_1-Vektor-Leptoquarks. Es sind auch die experimentelle Obergrenze der Zerfallsbreite sowie die daraus resultierende Untergrenze für die U_1-Masse eingetragen. Der Graph wurde mit [10] erstellt.

Es ergibt sich eine Mindestmasse von

$$m_{\mathrm{LQ}} \geq m_{\mathrm{LQ,min}} = 1.6 \cdot 10^3\,\mathrm{TeV}\,. \tag{4.71}$$

Um den Fehler abzuschätzen hat es sich nach W. Porod[3] als gute Abschätzung erwiesen, die starke Kopplung nicht nach Gleichung 4.5 laufen zu lassen, sondern die Rechnung noch einmal mit der Kopplung bei der bei der Z-Masse $\alpha_s = \alpha_s(m_Z)$ durchzuführen. Dies führt auf einen Wert von $m_{\mathrm{LQ,min},m_Z} = 2.4 \cdot 10^3\,\mathrm{TeV}$. Der tatsächliche Wert der *Mindestmasse* sollte sich also grob in diesem Bereich befinden. Sollte das U_1-Leptoquark tatsächlich existieren, so muss seine Masse über der Mindestmasse liegen, es könnte jedoch auch viel schwerer sein.

[3]Lehrstuhl für Theoretische Physik II, Universität Würzburg

5. Fazit

Nachdem die Feynman-Regeln für die behandelte Leptoquark-Theorie hergeleitet wurden, konnte mit ihrer Hilfe die Zerfallsbreite und damit das Verzweigungsverhältnis für einen im Standardmodell verbotenen Zerfall berechnet werden. Der letztendlich betrachtete Kaon-zu-Leptonpaar-Zerfall $K_L^0 \to e^\pm \mu^\mp$ wird durch das hier U_1 genannte Vektorboson vermittelt und das Verzweigungsverhältnis in Abhängigkeit von dessen Masse ausgedrückt. Anhand von experimentellen Grenzwerten für das Verzweigungsverhältnis konnte so eine Untergrenze für die U_1-Masse bestimmt werden.

Für die U_1-Masse wird von [20] eine Untergrenze von $1.4 \cdot 10^3$ TeV gegeben. Zu dieser Berechnung wurden allerdings ältere Daten zum Verzweigungsverhältnis verwendet. Insgesamt jedoch liegen die für die Massenuntergrenze gefundenen Werte vieler Gruppen in der Größenordnung von 10^3 TeV [7, 19]. Somit steht der hier gefundene Wert von $1.6 \cdot 10^3$ TeV in guter Übereinstimmung mit der restlichen Fachliteratur.

Bei dieser Größe liegt die Masse außerhalb der momentan für Teilchenbeschleuniger erreichbaren Energien[1]. Es kann also davon ausgegangen werden, dass auch in näherer Zukunft das Vektor-Leptoquark nicht direkt erzeugt werden kann. Mit mehr Daten, zum Beispiel zu seltenen Kaonzerfällen, könnten jedoch die Vorhersagen der Leptoquarkmodelle schon früher überprüft und der Parameterraum – wie in dieser Arbeit durchgeführt – weiter eingeschränkt werden.

Weiterführende Schritte wären zum Beispiel die Kopplungsmatrizen x nicht mehr diagonal zu wählen, sondern auch Generationenmischungen zuzulassen. Ebenfalls könnte man weitere Prozesse auch in höheren Ordnungen der Störungstheorie berechnen, woduch zusätzliche Feynmangraphen zur Übergangsamplitude beitragen.

[1] Die Schwerpunktsenergie des LHC beträgt momentan 13 TeV [13]

A. Numerische Werte

Teilchen	Symbol	Wert	Einheit	Quelle
K-Mesonen	M_{K^0}	497.611	MeV	[13]
	$M_{\mathrm{K}^\pm}$	493.677	MeV	[13]
Elektron	m_{e^-}	0.510 998 946 1	MeV	[13]
Myon	m_{μ^-}	105.658 374 5	MeV	[13]
Down-Quark	m_{d}	4.7	MeV	[13]
Strange-Quark	m_{s}	96	MeV	[13]
Z-Boson	m_{Z}	91.1876	GeV	[13]

Tabelle A.1.: Die Massen, welche für die Berechnungen verwendet wurden.

Kaon	Symbol	Wert	Einheit	Quelle
$\mathrm{K}^\pm$	$\tau_{\mathrm{K}^\pm}$	$1.2380 \cdot 10^{-8}$	s	[13]
K^0_L	$\tau_{\mathrm{K}^0_\mathrm{L}}$	$5.116 \cdot 10^{-8}$	s	[13]
K^0_S	$\tau_{\mathrm{K}^0_\mathrm{S}}$	$0.8954 \cdot 10^{-10}$	s	[13]

Tabelle A.2.: Die Lebensdauern der Kaonen.

Name	Symbol	Wert	Einheit	Quelle
Starke Kopplung bei Z-Masse	$\alpha_\mathrm{s}(m_\mathrm{Z})$	0.1182	—	[13, Tab. 1.1]
Reduzierte Planck-Konstante	$\hbar$	$6.582\,119 \cdot 10^{-22}$	MeV s	[13, Tab. 1.1]
Zerfallskonstante des K^0	f_{K^0}	176	MeV	[16, Tab. 4]
Verzweigungsverhältnis	$\mathrm{BR}\left(\mathrm{K}^0_\mathrm{L} \to \mathrm{e}^\pm\,\mu^\mp\right)^\mathrm{a}$	$< 4.7 \cdot 10^{-12}$	—	[13]

[a] Der Numerische Wert entspricht der Summe aus beiden Ladungsendzuständen.

Tabelle A.3.: Diverse Konstanten, welche für die Berechnungen verwendet wurden.

Literatur

[1] M. Böhm, A. Denner und H. Joos. *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction*. Vieweg+Teubner Verlag, 2001 (erwähnt auf Seite 11).

[2] I. Doršner u. a. „Physics of leptoquarks in precision experiments and at particle colliders". In: (2016). doi: 10.1016/j.physrep.2016.06.001. arXiv: 1603.04993 (erwähnt auf den Seiten 5, 7, 10, 15–17).

[3] H. Dreiner u. a. „Full 1-loop calculation of $\mathrm{BR}(B^0_{s,d} \to \ell\bar{\ell})$ in models beyond the MSSM with SARAH and SPheno". In: (2012). doi: 10.1016/j.cpc.2013.06.021. arXiv: 1212.5074 (erwähnt auf den Seiten 16, 17, 19, 20).

[4] L. Edelhäuser und A. Knochel. *Tutorium Quantenfeldtheorie*. Springer Nature, 2016. doi: 10.1007/978-3-642-37676-4 (erwähnt auf den Seiten 3, 4, 11, 12).

[5] J. Ellis. „TikZ-Feynman: Feynman diagrams with TikZ". In: (2016). doi: 10.1016/j.cpc.2016.08.019. arXiv: 1601.05437 (erwähnt auf den Seiten 10, 13, 15).

[6] M. Fierz. „Zur Fermischen Theorie des β-Zerfalls". In: *Zeitschrift für Physik* 104.7 (1937), S. 553–565. doi: 10.1007/BF01330070 (erwähnt auf Seite 14).

[7] P. Fileviez Pérez und M. B. Wise. „Low-scale quark-lepton unification". In: *Phys. Rev. D* 88 (5 Sep. 2013), S. 057703. doi: 10.1103/PhysRevD.88.057703 (erwähnt auf den Seiten iii, 1, 5, 7, 10, 25).

[8] H. Georgi. *Lie Algebras In Particle Physics: from Isospin To Unified Theories*. 2. Aufl. Frontiers in Physics. Avalon Publishing, 1999 (erwähnt auf Seite 5).

[9] D. Griffiths. *Introduction to elementary particles*. Physics textbook. Wiley, 1987 (erwähnt auf Seite 22).

[10] J. D. Hunter. „Matplotlib: A 2D graphics environment". In: *Computing In Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. doi: 10.1109/MCSE.2007.55 (erwähnt auf Seite 24).

[11] C. Itzykson und J. Zuber. *Quantum Field Theory*. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill International Book Co., 1980 (erwähnt auf Seite 14).

[12] E. Jones, T. Oliphant, P. Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.18.1. 2001–. url: http://www.scipy.org/ (besucht am 07. 02. 2017) (erwähnt auf Seite 22).

[13] C. Patrignani u. a., Particle Data Group. „Review of Particle Physics“. In: *Chin. Phys.* C40.10 (2016), S. 100001. doi: 10.1088/1674-1137/40/10/100001 (erwähnt auf den Seiten 9, 22, 25, 27).

[14] M. Peskin und D. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Advanced book classics. Addison-Wesley Publishing Company, 1995 (erwähnt auf den Seiten 3, 4, 11, 20).

[15] A. Pich. *Rare Kaon Decays*. 1996. arXiv: hep-ph/9610243 (erwähnt auf Seite 15).

[16] W. Porod, F. Staub und A. Vicente. „A Flavor Kit for BSM models“. In: (2014). doi: 10.1140/epjc/s10052-014-2992-2. eprint: arXiv:1405.1434 (erwähnt auf Seite 27).

[17] M. A. Sbaih u. a. „Lie Algebra and Representation of SU (4)“. In: *EJTP* 10.28 (2013), S. 9–26 (erwähnt auf Seite 5).

[18] P. Schmüser. *Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker*. 2. Aufl. Lecture notes in physics. Springer Berlin Heidelberg, 1995. doi: 10.1007/978-3-642-57766-6 (erwähnt auf Seite 21).

[19] A. D. Smirnov. „Mass limits for scalar and gauge leptoquarks from $K_L^0 \to e^\mp\mu^\pm, B^0 \to e^\mp\tau^\pm$ decays“. In: (2007). doi: 10.1142/S0217732307024401. arXiv: 0705.0308 (erwähnt auf Seite 25).

[20] G. Valencia und S. Willenbrock. „Quark-lepton unification and rare meson decays“. In: *Phys. Rev. D* 50 (11 Dez. 1994), S. 6843–6848. doi: 10.1103/PhysRevD.50.6843 (erwähnt auf Seite 25).

Danksagung

Zu guter Letzt seien hier noch einige Worte des Dankes angebracht. Zunächst natürlich an Professor Werner Porod von der Theoretischen Physik II in Würzburg, sowie den Doktoranden Thomas Faber. Sie halfen mir mir bei zahllosen Fragen und Schwierigkeiten stets geduldig weiter und ich habe viel von ihnen gelernt. Auch haben sie sich durch unfertige Versionen dieser Arbeit gelesen und mir hilfreiche Anregungen gegeben.

Generell danke ich meinen Kollegen an der TPII für den regen und interessanten Austausch, sowohl im Büro, als auch am Mensatisch.

Für das fleißige Korrekturlesen möchte ich mich außerdem bei meinen Eltern Heike und Rainer Stephan, sowie Birgit Bühl und Felix Tremmel bedanken.

Auf jeden Fall muss auch Yannik Zimmermann dankend erwähnt werden. Zum einen, da sich in den Diskussionen mit ihm – egal zu welcher Stunde – immer wieder Spannendes auftut oder Bekanntes neu ordnet und er mir stets mit Rat und Tat zur Seite steht. Zum anderen hatte er einiges an hilfreichen Anstößen zum Gestaltung, Technik und Inhalt dieser Arbeit beizutragen. Vor allem aber war mir all die Jahre ein besonderer Freund und Kollege, dem ich sowohl im, als auch neben dem Physikstudium viel zu verdanken habe. Ohne dich wäre ich nicht hier angelangt.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst habe. Dabei habe ich keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet. Zudem habe ich diese Arbeit keiner anderen Prüfungsbehörde unter Erlangung eines akademischen Grades vorgelegt.

Philipp Stephan
Würzburg, den 4. April 2017